

2 溝付き真円軸受の軸受最高温度を予測するためのモデル式

A Model Expression for Predicting Maximum Bearing Temperature of Cylindrical

Journal Bearing with Two Axial Oil Grooves

九工大・情工（正）*畠中 清史 九工大・情工（学）内田 溪太郎

Kiyoshi Hatakenaka*, Keitaro Uchida*

*Kyushu Institute of Technology

1. はじめに

産業用の回転機械は近年、大型化、高速化の傾向が進んでいる。これにともない、それを支えるジャーナル軸受の運転条件は過酷になっている。この軸受は、ジャーナルと軸受の間に形成される軸受すきま内に十分な厚さの流体潤滑油膜を形成し、油膜の中で軸受荷重に応じた動圧を発生させる。このため、ジャーナルと軸受とが運転中に直接接触することはない。一方、ジャーナルと軸受の相対速度に起因するせん断発熱により油膜内の温度は上昇する。せん断作用は最小油膜厚さ位置の付近で最大となるため、油膜に接する軸受面の温度（軸受温度）はその付近で最大となる。

ジャーナル軸受の潤滑面には、軸受すきま内に異物が侵入した場合にジャーナル表面の損傷を防ぐために、異物埋収性に優れた軟質金属のホワイトメタルが広く使われている。ホワイトメタルは低融点材料であり、その引張強さは温度の上昇とともに低下する。高速運転時に軸受最高温度が上昇すると、溶融や表面流動という軸受面の損傷が最小油膜厚さ位置の付近で特に生じやすくなる。このため、高速回転機械用のジャーナル軸受を設計する際には、運転中の軸受最高温度が許容値（上限値）を下回ることを確認する必要がある。

また、油膜温度が上昇すると、油膜の粘度（油膜粘度）は低下する。油膜厚さの形状が変わらずに油膜粘度だけが低下した場合、油膜反力は減少するので、静荷重を受ける軸受ではその減少分を補うためにジャーナルの偏心がいっそう進む。その結果、最小油膜厚さが減少することとなり、ジャーナルが軸受に接触する危険性は高くなる。このため、ジャーナル軸受の設計時には、運転中の最小油膜厚さが許容値（下限値）を上回ることを確認する必要がある。

このような背景のもと、油膜内の 3 次元的な温度と粘度の分布を考慮する熱流体潤滑（ThermoHydrodynamic Lubrication, THL）モデルを適用してジャーナル軸受の性能解析が行われている。最新の THL モデルを用いると、定常運転時のすべり軸受面の温度を高精度で予測できる。

THL モデルは、軸受諸元や運転条件を指定した場合の軸受性能を得ることができる。しかし、軸受に要求される性能（例えば、軸受最高温度が上限値を下回ること）を達成しうる軸受諸元を設計解として得ることはできない。軸受到課された制約を満たす適切な仕様の軸受を容易に決定することができないため、軸受設計者が要望する設計法、つまり、最終的な設計解に短時間で到達できる、簡便で、迅速な、しかも直感的な設計法に THL モデルをそのまま応用することは難しい。

これに対し、簡易 THL モデルによる軸受性能予測値（THL 予測値）をもとに設計図やモデル式を作成し、これらを利用する方法が提案されている¹⁻³⁾。設計図^{1, 2)}あるいはモデル式³⁾から得られる軸受最高温度は、実験値に比べ、実用上、許容可能でしかも安全側（高温側）の値となる。モデル式³⁾を用いる方法は読取り誤差を生じない点で設計図を用いる方法^{1, 2)}の改良版に位置付けられる。これらの方法によれば、THL モデルにもとづく軸受設計に要する時間の大幅な短縮が期待できる。

モデル式³⁾は、反負荷側（鉛直上方）に給油溝をもつ真円軸受を対象として導出されており、THL 予測値から構築されたデータベース内の軸受性能を 10% 程度の精度で予測する。また、モデル式³⁾により算出した軸受最高温度の予測値は実験値に比べて高くなる。ただし、その差は 10 °C を上回ることではなく、実用上許容可能な範囲に収まる。設計解を探索する過程ではこのような予測値を許容値と比較するので、安全への裕度がほどほどに高い設計が可能となる。

従来のモデル式³⁾は、マクローラン級数展開と重回帰分析⁴⁾を応用した多項式として求めている。4 つの無次元軸受設計変数の値を指定するだけで THL 予測値を精度良く算出できる（当てはまりの良さを表す指標の決定係数は 0.999 を上回る）が、70 項からなる多項式であるため使い勝手がやや悪い。予測精度を悪化させずに項数を削減するための一般的な指針は知られていないので、 t 検定⁵⁾を応用してモデル式の項数を 11 にまで低減した。しかし、この式の予測精度を元のモデル式と同等に保つために

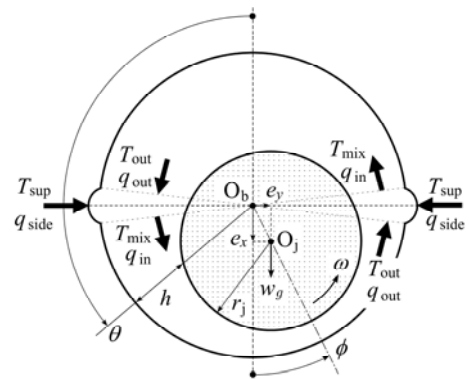


Fig. 1 Cylindrical journal bearing with two axial oil grooves

は適用範囲を限定する必要があった。

次に、著者らは2溝付き真円軸受（Fig. 1）に解析対象を変更した⁶⁾。ジャーナル軸受の性能は給油部の形状、設置位置、個数に応じて大きく異なるため、この軸受の性能に関するデータベースを軸受設計変数の広範な組合せに対する THL 予測値をもとに新たに構築した⁷⁾。さらに、データベース値の中で、特に、軸受最高温度に着目し、これと軸受設計変数との関係について調べ、重回帰分析に先立ち、初等関数を組み合わせた関数（前処理関数）を用いて軸受設計変数と軸受最高温度の双方を変換すれば、データベース値が規則的に並ぶことを示した⁸⁾。これを受け、本報では2溝付き真円軸受の軸受最高温度に関するモデル式の提示を目的とする。

2. データベース値の特徴

2 溝付き真円軸受のデータベースは、修正 ISOADI THL モデル⁶⁾による予測値をもとに構築されている。このモデルは、4 つの無次元軸受設計変数（ゾンマーフェルト数 S 、軸受幅径比 A 、ベクレ数 Pe 、コンサリ数 Kh ）を与えて、一般化レイノルズ方程式および油膜のエネルギー方程式を、油膜厚さ式、潤滑油の温度粘度関係式、ジャーナル表面温度と混合油温度の各算出式、軸受静荷重と油膜反力との釣り合い式を連立させて解き、軸受最高温度 $\theta_{b\max}$ などの軸受性能を無次元量として得る。データベースには、実用上有用な範囲（ S : 0.02~20, A : 0.25~2, Pe : 1~256, Kh : 0.001~0.256）で選定した 15 個の S , 9 つの A , 9 つの Pe , 9 つの Kh の組合せ計 10 935 (=15 × 9 × 9 × 9) ケースに対する THL 予測値のうち、流体潤滑状態での運転が想定され（偏心率が 0.97 以下であり）、しかも、軸受高温限界や油酸化限界を超える危険な運転状態⁹⁾になる THL 予測値を除外した（ $\theta_{b\max}$ の上限値を下回る）、8 332 ケースの軸受性能が保存されている⁷⁾。本研究では、 $\theta_{b\max}$ の上限値は 4 とした。

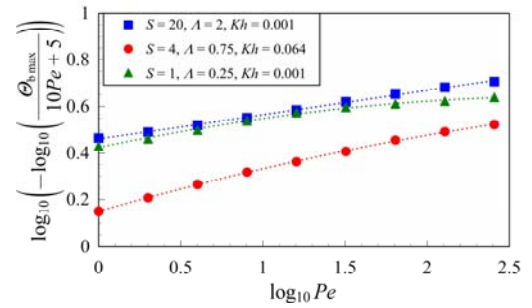
従来のモデル式³⁾を導出した際と同様に、まず、軸受最高温度 $\theta_{b\max}$ と各軸受設計変数の各々に対して前処理を施した。試行錯誤を重ねた末、縦軸は $\log_{10}(-\log_{10}(\theta_{b\max}/(10Pe+5)))$ とし、横軸は各軸受設計変数の常用対数としてグラフに表示すると、 $\theta_{b\max}$ のデータ点列が Fig. 2 のように規則的に並ぶことが分かった。図中の点線は、データ点列を 2 次関数として当てはめた場合の近似曲線を表す。近似曲線の決定係数は、 Pe に対しては 0.996 以上 (Fig. 2(a)), S に対しては 0.993 以上で (Fig. 2(b)), Kh に対しては 0.999 以上、 A に対しては 0.480 以上 (Fig. 2(d)) である。データベース値が近似曲線に完全に乗って見える Fig. 2(d) で決定係数が小さいのは、データ点がほとんど水平に並んでいるためである。近似曲線から換算した $\theta_{b\max}$ の予測値とそのデータベース値との相対誤差は 5 % を下回り、一致度は高い。

3. 重回帰分析によるモデル式とその予測精度

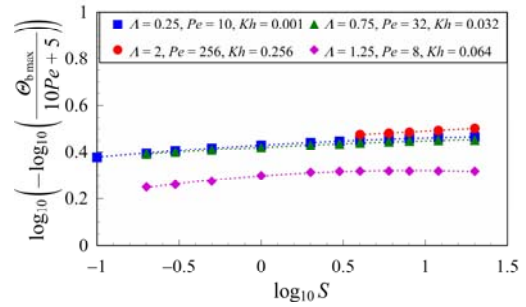
前処理を施すことで、軸受最高温度 $\theta_{b\max}$ が 4 つの軸受設計変数 S , A , Pe , Kh に対して 2 次関数的に変化することになったので、軸受最高温度が 4 つの軸受設計変数の双 2 次関数で表されると仮定し、そのモデル式を

$$\hat{Y} = \sum_{a=0}^2 \sum_{b=0}^2 \sum_{c=0}^2 \sum_{d=0}^2 \alpha_{abcd} Z_S^a Z_A^b Z_{Pe}^c Z_{Kh}^d \quad (a+b+c+d \leq 2) \quad (1)$$

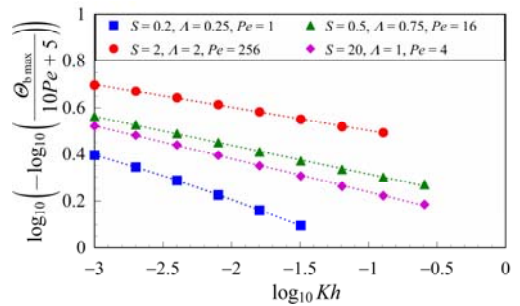
で表すことにする。ただし、 $\hat{}$ は予測値（近似値）を意味し、 α_{abcd} は定数係数、 Y , Z_S , Z_A , Z_{Pe} , Z_{Kh} はそれぞれ前処理関数による変換を行った後の $\theta_{b\max}$, S , A , Pe , Kh である。式(1)は項数 15 の多項式である。定数係数 α_{abcd}



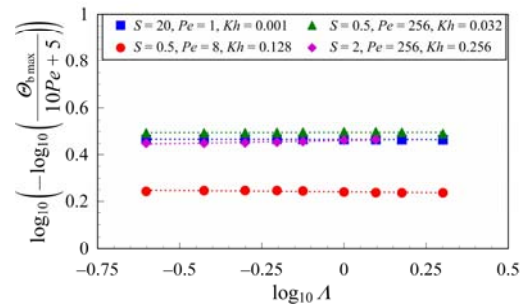
(a) $\theta_{b\max}$ vs. Pe



(b) $\theta_{b\max}$ vs. S



(c) $\theta_{b\max}$ vs. Kh



(d) $\theta_{b\max}$ vs. A

Fig. 2 Relationship between maximum bearing temperature and bearing design variables (After preprocessing)

は、重回帰分析⁴⁾を応用して、偏回帰係数として推定すると、その値は Table 1 に示す通りとなる。モデル式(1)の決定係数は 0.995 であった。しかし、モデル式(1)から換算した $\theta_{b\max}$ の予測値とそのデータベース値との誤差は大きく、絶対誤差の最大は $\theta_{b\max} = 3.68$ に対して 1.25, 相対誤差の最大は $\theta_{b\max} = 0.0236$ に対して 1.25 である。誤差が大きくなる理由は次の通りである。

2 次関数は、3 次以上の多項式関数と比べた場合、値の変化が、頂点の近くでは大きく、頂点から離れるほど緩やかになる。偶数次数の多項式関数の中では、グラフの開き具合がもっとも大きい。この開き具合は 2 乗の項の定数係数の値に依存する。この値は、Fig. 2 のように、軸受設計変数 3 つの値に応じて決まる。決定係数の値がちょうど 1 の場合はデータベース値が放物線上に位置するので絶対誤差も相対誤差も 0 となるが、モデル式(1)の場合、その値は 1 ではない。モデル式(1)による近似曲線は、それら 3 つの軸受設計変数の値に応じて、データベース値との当てはまりがもっとも良くなる開き具合の放物線になるだけである。開き具合の調整を 2 乗の項の定数係数の値のみを通してしかできないので、データベースの規模が大きくなれば、データベースは近似曲線からのずれが大きな THL 予測値を含み得るし、ずれは小さくてもデータベース値そのものが小さいために相対誤差が大きくなる THL 予測値も含み得る。決定係数は、全変動（データベース値とその平均値との差の 2 乗和）に対する残差平方和（データベース値とモデル式(1)による予測値との差の 2 乗和）の比率が小さいほど大きくなるので、ずれ（残差）の大きなデータベース値の個数が少ない、あるいは、ずれのあるデータベース値の個数が多くても個々のずれが小さいのであれば、決定係数は 1 に近い値になる。実際、絶対誤差が 1 を上回るデータベース値は 2 つあったが、個数が少ないとはいえず、ずれが大きいのので、絶対誤差の最大は大きくなった。一方、残差平方和は 140 つまり 1 個あたりの残差は平均で 0.13 であったが、これは温度上昇がほとんど生じないケースの $\theta_{b\max}$ に対しては相当に大きな値であるので、相対誤差の最大が 1 を上回る結果となったことは理に適う。したがって、決定係数が 1 に近いからという理由でモデル式(1)を適用しても予測された軸受最高温度が大きな誤差を含むおそれがあるので、軸受設計へのモデル式(1)の応用は推奨できない。

4. 新しいモデル式の模索

前処理関数による変換を行った軸受最高温度の予測値 \hat{Y} ($= \log_{10} (-\log_{10} (\theta_{b\max}/(10Pe+5)))$) は、Fig. 2(a)に示したように、前処理関数による変換を行ったペクレ数 Z_{Pe} ($= \log_{10} Pe$) の 2 次関数となる。両者の間には

$$\hat{Y} = a_{Pe2} Z_{Pe}^2 + a_{Pe1} Z_{Pe} + a_{Pe0} \quad (2)$$

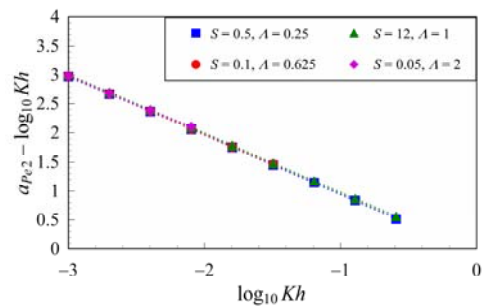
という関係が成り立つ。ここで、定数係数 a_{Pei} ($i = 0, 1, 2$) の値が残り 3 つの軸受設計変数 S, A, Kh の値に応じて決まる、つまり、

$$a_{Pei} = a_{Pei}(S, A, Kh) \quad (i = 0, 1, 2) \quad (3)$$

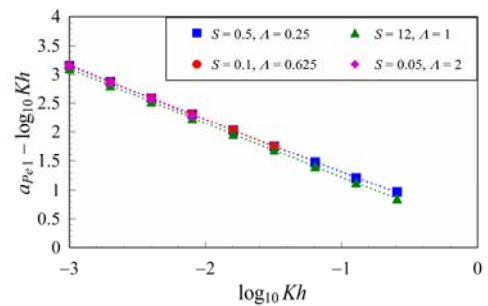
であると考え、回帰分析¹⁰⁾を応用して、 a_{Pei} ($i = 0, 1, 2$) と S, A, Kh のいずれか 1 つとの関係を求めることにする。その手順は 2. および 3. に倣う。まず、 a_{Pei} ($i = 0, 1, 2$) お

Table 1 Partial regression coefficient in model expression Eq. (1)

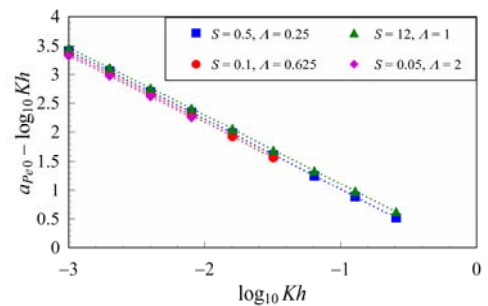
No.	a	b	c	d	α_{abcd}
1	0	0	0	0	-0.0958
2	0	0	0	1	-0.1766
3	0	0	0	2	0.000374
4	0	0	1	0	0.257
5	0	0	1	1	0.0379
6	0	0	2	0	-0.0206
7	0	1	0	0	-0.00334
8	0	1	0	1	0.00314
9	0	1	1	0	0.00479
10	0	2	0	0	-0.0243
11	1	0	0	0	0.0607
12	1	0	0	1	0.00489
13	1	0	1	0	-0.00234
14	1	1	0	0	0.01790
15	2	0	0	0	-0.01902



(a) a_{Pe2} vs. Kh



(b) a_{Pe1} vs. Kh



(c) a_{Pe0} vs. Kh

Fig. 3 Relationship between constant coefficients in Eq. (2) and Khonsari number (After preprocessing)

および S , A , Kh からなるデータベースを構築し、そのデータベース値をもとにして a_{Pei} ($i = 0, 1, 2$) と S , A , Kh のいずれか 1 つとの関係について調べる。その際、 a_{Pei} ($i = 0, 1, 2$) のデータ点列が規則的に並ぶように、初等関数を組み合わせた関数による前処理を行う。具体的な関数形は、試行錯誤を重ねた末、決定する。

例として、残る 2 つの軸受設計変数の組合せが少なくなるように、 a_{Pei} ($i = 0, 1, 2$) と Kh との関係を調べた。その結果を Fig. 3 に示す。図中、■ は $S = 0.5$, $A = 0.25$, (ケース 1), ● は $S = 0.1$, $A = 0.625$ (ケース 2), ▲ は $S = 12$, $A = 1$ (ケース 3), ◆ は $S = 0.05$, $A = 2$ (ケース 4) のそれぞれのデータベース値をもとに打点してある。

まず、係数 a_{Pe2} について、 $\log_{10} Kh$ を横軸に $(a_{Pe2} - \log_{10} Kh)$ を縦軸とするグラフに打点すると、Fig. 3(a) に示すようにケース 1~4 のすべてでそのデータベース値が規則的に並んだ。各ケースの点列を 2 次関数で近似した場合の決定係数はいずれのケースでも 1.00 であった。近似曲線式と前処理関数式をもとに算出した a_{Pe2} の近似値とそのデータベース値との相対誤差の最大値を求めると、ケース 1, ケース 2, ケース 3, ケース 4 のそれぞれで 13 %, 11 %, 16 %, 14 % であった。いずれのケースでも 15 % 前後の精度でデータベース値を予測できている。したがって、 $(a_{Pe2} - \log_{10} Kh)$ による前処理を施した a_{Pe2} のデータ点列が、 $\log_{10} Kh$ による前処理を行った Kh に対して放物線状に並ぶとみなすことにする。

次に、係数 a_{Pe1} について、 $\log_{10} Kh$ を横軸に $(a_{Pe1} - \log_{10} Kh)$ を縦軸とするグラフに打点すると、Fig. 3(b) に示すようにケース 1~4 のすべてでそのデータベース値が規則的に並んだ。各ケースの点列を 1 次関数で近似した場合の決定係数はケース 1~4 のすべてで 1.00 であった。近似曲線式と前処理関数式をもとに算出した a_{Pe1} の近似値とそのデータベース値との相対誤差の最大値を求めると、ケース 1, ケース 2, ケース 3, ケース 4 のそれぞれで 9.6 %, 1.5 %, 12 %, 2.0 % であった。いずれのケースでも 10 % 程度の精度でデータベース値を予測できている。したがって、 $(a_{Pe1} - \log_{10} Kh)$ による前処理を施した a_{Pe1} のデータ点列が、 $\log_{10} Kh$ による前処理を行った Kh に対して直線状に並ぶとみなすことにする。

また、係数 a_{Pe0} について、 $\log_{10} Kh$ を横軸に $(a_{Pe0} - \log_{10} Kh)$ を縦軸とするグラフに打点すると、Fig. 3(c) に示すようにケース 1~4 のすべてでそのデータベース値が規則的に並んだ。各ケースの点列を 1 次関数で近似した場合の決定係数はケース 1~4 のすべてで 1.00 であった。近似曲線式と前処理関数式をもとに算出した a_{Pe0} の近似値とそのデータベース値との相対誤差の最大値を求めると、ケース 1, ケース 2, ケース 3, ケース 4 のそれぞれで 18 %, 3.4 %, 2.8 %, 0.85 % であった。いずれのケースでも 20 % 以下の精度でデータベース値を予測できている。したがって、 $(a_{Pe0} - \log_{10} Kh)$ による前処理を施した a_{Pe0} のデータ点列が、 $\log_{10} Kh$ による前処理を行った Kh に対して直線状に並ぶとみなすことにする。

以上より、前処理関数による変換を行った式(2)の定数係数の予測値 $\widehat{Y_{aPei}}$ ($i = 0, 1, 2$) は、Fig. 3 に示したように、前処理関数による変換を行ったコンサリ数 $Z_{Kh} (= \log_{10} Kh)$ の 2 次または 1 次の関数となる。両者の間には

$$\widehat{Y_{aPei}} = b_{Khi2} Z_{Kh}^2 + b_{Khi1} Z_{Kh} + b_{Khi0} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (4)$$

という関係が成り立つ。

今度は、定数係数 b_{Khij} ($i, j = 0, 1, 2$) の値が残り 2 つの軸受設計変数 S , A の値に応じて決まる、つまり、

$$b_{Khij} = b_{Khij}(S, A) \quad (i, j = 0, 1, 2) \quad (5)$$

であると考え、回帰分析¹⁰⁾を応用して、 b_{Khij} ($i, j = 0, 1, 2$) と S , A のいずれか 1 つとの関係を求めることにする。その手順は a_{Pei} と同じである。まず、 b_{Khij} ($i, j = 0, 1, 2$) および S , A からなるデータベースを構築し、そのデータベース値をもとにして b_{Khij} ($i, j = 0, 1, 2$) と S , A のいずれか 1 つとの関係について調べる。その際、 b_{Khij} ($i, j = 0, 1, 2$) のデータ点列が規則的に並ぶように、初等関数を組み合わせた関数による前処理を行う。具体的な関数形は、試行錯誤を重ねた末、決定する。最終的に、前処理関数による変換を行った式(4)の定数係数の予測値 $\widehat{Y_{bKhij}}$ ($i, j = 0, 1, 2$) が、前処理関数による変換を行った軸受幅径比 Z_A の 2 次関数となる、つまり、両者の間に

$$\widehat{Y_{bKhij}} = c_{Aij2} Z_A^2 + c_{Aij1} Z_A + c_{Aij0} \quad (i, j = 0, 1, 2) \quad (6)$$

という関係が成り立つ場合、定数係数 c_{Aijk} ($i, j, k = 0, 1, 2$) の値が残りのゾンマーフェルト数 S の値に応じて決まる、つまり、

$$c_{Aijk} = c_{Aijk}(S) \quad (i, j, k = 0, 1, 2) \quad (7)$$

であるとし、回帰分析¹⁰⁾を応用して、 c_{Aijk} ($i, j, k=0, 1, 2$) と A との関係を求める。その手順は a_{Pei} および $b_{K hij}$ と同じである。最終的に、前処理関数による変換を行った式(6)の定数係数の予測値 $\widehat{Y_{cAijk}}$ ($i, j, k=0, 1, 2$) は、前処理関数による変換を行ったゾンマーフェルト数 Z_S の 2 次関数となったとして、両者の間に

$$\widehat{Y_{cAijk}} = d_{Sijk2} Z_S^2 + d_{Sijk1} Z_S + d_{Sijk0} \quad (i, j, k=0, 1, 2) \quad (8)$$

という関係が成り立つとする。

この場合、式(8)は $3^3 = 27$ 本をまとめて表記してあることになる。これを式(6)、式(4)、式(2)に順に代入して、前処理関数による変換を行った軸受最高温度の予測値 \widehat{Y} のモデル式(2)を最終的には 81 項からなる多項式として求める。ただし、それら 81 の項がすべて \widehat{Y} に大きく寄与するわけではなく、一部には寄与度の小さな項もある。モデル式の項数は、使い勝手の観点からすれば、少ない方が望ましいので、 t 検定⁵⁾を応用して、項数を低減していく。式(2)の項数を低減した式を軸受最高温度 θ_{bmax} のモデル式とする。

5. 結言

本報では、2 溝付き真円軸受の軸受最高温度に関するモデル式を導出する方針について検討した。モデル式の導出にあたり、式(6)の係数 c_{Aijk} ($i, j, k=0, 1, 2$) と式(8)の係数 d_{Sijkl} ($i, j, k, l=0, 1, 2$) を特定する必要がある。これらを特定した後、 t 検定⁵⁾を応用して項数を低減していく予定である。

文献

- 1) M. M. Khonsari, J. Y. Jang, & M. Fillon: On the Generalization of Thermohydrodynamic Analyses for Journal Bearings, ASME Journal of Tribology, 118, 3 (1996), 571.
- 2) K. Hatakenaka: A New Design Chart Method of Journal Bearings Based on a Simplified Thermohydrodynamic Lubrication Theory, Tribology Transactions, 63, 5 (2020), 935.
- 3) 畠中・本田：簡易熱流体潤滑モデルにもとづく真円軸受の新しい設計法，トライボロジスト，66, 7 (2021), 548.
- 4) 兼子：R で学ぶ多変量解析，日科技連，(2011)，93.
- 5) 涌井：まずはこの一冊から 意味がわかる統計解析 (6 章)，ベレ出版，(2013)，155.
- 6) 畠中・内田：2 溝付き真円軸受の設計への応用を見据えた簡易熱流体潤滑モデル，日本機械学会論文集，88, 915 (2022)，<https://doi.org/10.1299/transjsme.22-00234>.
- 7) 畠中・内田：2 溝付き真円軸受の熱流体潤滑性能に関するデータベースの構築，トライボロジー会議 (2022 秋 福井) 予稿集，D2.
- 8) 内田・畠中：2 溝付き真円軸受の軸受最高温度に及ぼす軸受設計変数の影響，トライボロジー会議 (2023 春 東京) 予稿集.
- 9) N. J. Neale: Tribology Handbook, second edition, Butterworth Heinmann Ltd., (1995) A9.2.
- 10) 中村：R で学ぶデータサイエンス 2 多次元データ解析法 (第 3 章)，共立出版，(2009)，26.