

# 任意の高粘度化表面層をもつ薄膜の潤滑方程式の導出と微小傾斜平面軸受特性の解析

## Modified Reynolds Equation for Thin Film Lubrication with Arbitrarily Enhanced Viscosity Surface Layers and Analysis of Micro-Tapered Pad Bearing

東工大 OB (正) 小野 京右

Kyosuke Ono: Tokyo Institute of Technology (OB)

### 1. はじめに

近年、高分子添加剤による 10 ナノメートル以上の EHL 膜の増加<sup>1)</sup>、なじみ処理による微小テクスチャの高負荷容量・超低摩擦化、流体潤滑化<sup>2)</sup>、各種添加剤による往復動エンジンの潤滑特性の向上<sup>3,4)</sup>などが報告され、多くのトライボロジストの関心の的になっている。また狭小化薄膜の粘度特性の測定も行われている<sup>5-7)</sup>。筆者は伊藤ら<sup>5)</sup>によって測定された表面層における粘度特性を考慮した潤滑方程式を導出し、これを用いて微小な傾斜平面軸受の潤滑特性を解析し、なじみ処理により高負荷容量、低摩擦係数の流体潤滑機構が得られることを明らかにした<sup>8,9)</sup>。また柴崎ら<sup>6)</sup>によって明らかにされた 200~230 nm のすきまから高粘度化し、約 100 nm 以下で飽和する粘度特性をもつ添加剤付きエンジンオイルに対する粘度特性を考慮する潤滑方程式の定式化も試み、低速時における高負荷容量、低摩擦係数特性の可能性を明らかにした<sup>10)</sup>。しかし柴崎ら<sup>6)</sup>、田村ら<sup>7)</sup>によって計測される金属系分散剤、MoDTC 等を含むエンジンオイルの等価粘度は膜厚さ 200 nm 以下で急激に増加しており、かなり高次の関数で表わす必要がある。そこで、本研究では、任意の粘度関数で表わされる高粘度表面層が片面及び両面に形成されていると仮定した場合の修正レイノルズ方程式を定式化する。任意の粘度関数による高粘度表面層の Reynolds 方程式を定式化する基本手法は、Tichy<sup>11)</sup>によって示され、また Zhang<sup>12)</sup>らは片面に高粘度層をもつ場合の修正 Reynolds 方程式を示し、ball on disk の EHL 特性を解析し、実験と整合することを示した。本研究は軸受両面に高粘度化層をもつ両面モデルの Reynolds 方程式をも定式化し、顕著に高い等価粘度特性を示す添加剤付きエンジン潤滑油をテクスチャ、ピストンリング等のモデルとしての微小傾斜平面軸受に適用したときの軸受特性を両面・片面モデルに基づき比較的に明らかにする。

### 2. 任意の粘度関数に対する修正 Reynolds 方程式

図 1 は後半に解析する傾斜平面軸受の潤滑機構モデルである。y 軸方向には一様と見なすと下面が x 方向に速度  $U$  をもつ二次元流動モデルで解析できる。粘性が支配的な軸受すきま内の流動の微小要素  $dx \cdot dz$  における圧力と粘性力との釣り合い式は次式となる。

$$\frac{d}{dz} \left( \mu_z \frac{du}{dz} \right) = \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

ここで粘度  $\mu_z$  は固体壁面からの距離  $z$  の関数である。ここでは高粘度化層が運動面に形成されているとする片面モデルと、両面に対称的に形成されているとする両面モデルにおけるすきま内流動式および Reynolds 方程式を導出する。

#### 2.1 運動面のみに高粘度化層が形成されている場合の修正 Reynolds 方程式

式 (1) を  $z$  で積分し境界条件  $z=0$  のとき  $u=U$ 、 $z=h$  のとき  $u=0$  を用いると、 $u(z)$  は次式で表わされる。

$$u(z) = \frac{dp}{\mu_b dx} \left[ f_2(z) - \frac{f_2(h)}{f_1(h)} f_1(z) \right] + U \left( 1 - \frac{f_1(z)}{f_1(h)} \right) = \frac{dp}{\mu_b dx} u_{p1} + U u_{s1} \quad (2)$$

$$f_1(z) = \mu_b \int_0^h \mu_z^{-1} dz, \quad f_2(h) = \mu_b \int_0^h (z / \mu_z) dz, \quad f_3(h) = \mu_b \int_0^h (z^2 / \mu_z) dz \quad (3a, b, c)$$

速度  $u(z)$  を軸受すきまで積分し流量  $q$  を求め、一定条件  $dq/dx=0$  より二次元レイノルズ方程式は次式となる。

$$\frac{d}{dx} \left\{ Q_{1p}(h) \frac{dp}{dx} \right\} = \mu_b U \frac{dQ_{1s}(h)}{dx} \quad (4)$$

$$Q_{p1}(h) = [f_3(h) - f_2(h)^2 / f_1(h)], \quad Q_{s1}(h) = f_2(h) / f_1(h) \quad (5a, b)$$

また、運動面、固定面におけるせん断力  $\tau_0$ ,  $\tau_h$ 、および平行すきまの等価粘度  $\mu_{ef}$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$\tau_0 = \frac{dp}{dx} \frac{f_2(h)}{f_1(h)} + \frac{\mu_b U}{f_1(h)}, \quad \tau_h = \frac{dp}{dx} \left\{ \frac{f_2(h)}{f_1(h)} - h \right\} + \frac{\mu_b U}{f_1(h)}, \quad \frac{\mu_{ef}}{\mu_b} = \tau_h \frac{h}{U} = \frac{h}{f_1(h)} \quad (6, 7, 8)$$

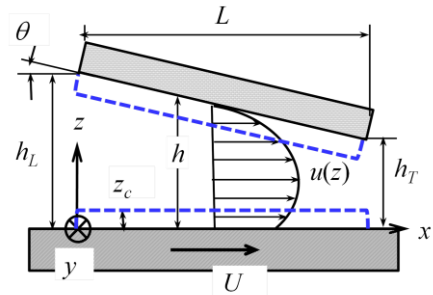


Fig. 1 Coordinate system and micro-tapered pad bearing model for lubrication analysis

## 2.2 両面に高粘度層が対称的に形成されている場合の修正 Reynolds 方程式

領域  $0 \leq z \leq h/2$  の速度を  $u_1(z)$ , 領域  $h/2 \leq z \leq h$  の速度を  $u_2(z)$  とする. 基礎方程式 (1) の各領域における不定積分式に, 境界条件として, 軸受壁面での速度条件:  $u_1(0) = U$ ,  $u_2(h) = 0$ , 液膜の中央位置  $z = h/2$  における速度が等しい条件:  $u_1(h/2) = u_2(h/2)$ , およびせん断応力が等しい条件:  $[\mu_z(z)du_1/dz]_{z=h/2} = [\mu_z(h-z)du_2/dz]_{z=h/2}$  を用いて積分定数を決め整理すると,  $u_1(z)$ ,  $u_2(z)$  はそれぞれ次式で与えられる.

$$u_1(z) = \frac{1}{\mu_b} \frac{dp}{dx} u_{p11} + U u_{s11} \quad (0 \leq z \leq h/2), \quad u_2(z) = \frac{1}{\mu_b} \frac{dp}{dx} u_{p21} + U u_{s22} \quad (h/2 \leq z \leq h) \quad (9, 10)$$

$$u_{p11} = f_{12}(z) - \frac{h}{2} f_{11}(z), u_{s11} = 1 - \frac{f_{11}(z)}{2f_{21}(h)} \quad (11, 12)$$

$$u_{p21} = f_{12}(h/2) - \frac{h}{2} f_{11}(h/2) + f_{22}(z) - \frac{h}{2} f_{21}(z), u_{s22} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{f_{21}(z)}{f_{21}(h)} \right\}$$

片面の粘度関数を  $\mu_z(z)$  ( $0 \leq z \leq h/2$ ) とすると, 対抗面の粘度関数は  $\bar{\mu}_z(z) = \mu_z(h-z)$  ( $0 \leq z \leq h/2$ ) で与えられる. これより

$$f_{11}(z) = \int_0^z \frac{\mu_b}{\mu_z} dz, \quad f_{12}(z) = \int_0^z \frac{\mu_b z}{\mu_z} dz, \quad f_{21}(z) = \int_{h/2}^z \frac{\mu_b}{\bar{\mu}_z} dz, \quad f_{22}(z) = \int_{h/2}^z \frac{\mu_b z}{\bar{\mu}_z} dz \quad (13a, b, c, d)$$

速度をすきまで積分し流量を求め, 流量一定条件から一次元レイノルズ方程式は次式で表わされる.

$$\frac{d}{dx} \left\{ Q_{p2}(h) \frac{dp}{dx} \right\} = \mu_b U \frac{dQ_{s2}(h)}{dx} \quad (14)$$

$$Q_{p2}(h) = \frac{h^2}{2} f_{11}(h/2) - f_{13}(h/2) - f_{23}(h), \quad Q_{s2}(h) = \frac{h}{2} \quad (15a, b)$$

$$f_{13}(h/2) = \int_0^{h/2} \frac{\mu_b z^2}{\mu_z} dz, \quad f_{23}(h) = \int_{h/2}^h \frac{\mu_b z^2}{\bar{\mu}_z} dz \quad (16a, b)$$

また運動面, 固定面におけるせん断応力  $\tau_0$ ,  $\tau_h$  および平行すきまにおける等価粘度  $\mu_{ef}$  はそれぞれ次式で与えられる.

$$\tau_0 = \frac{dp}{dx} \frac{h}{2} + \frac{\mu_b U}{2f_{12}(h)}, \quad \tau_h = -\frac{dp}{dx} \frac{h}{2} + \frac{\mu_b U}{2f_{12}(h)}, \quad \frac{\mu_{ef}}{\mu_b} = \frac{h}{2f_{12}(h)} \quad (17, 18, 19)$$

$x$  方向に滑り速度  $U$  をもち,  $y$  方向にも圧力流れを有し, スクイーズ効果も考慮した二次元修正レイノルズ方程式は次式で与えられる<sup>8,9)</sup>. ここで片面モデルの場合は  $i=1$ , 両面モデルの場合は  $i=2$  である.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ Q_{pi}(h) \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ Q_{pi}(h) \frac{\partial p}{\partial y} \right\} = \mu_b U \frac{\partial Q_{si}(h)}{\partial x} + \mu_b \frac{\partial h}{\partial t} \quad (20)$$

## 3. 微小傾斜平面軸受の特性解析

### 3.1 計算に用いた軸受・潤滑膜の諸元

先行論文<sup>10)</sup>では, 固体壁面で飽和する等価高粘度特性をもつ表面層の粘度関数を,

$$\mu_z = \mu_b \left\{ r_\mu + (z/z_c)^N \right\} / \left\{ 1 + (z/z_c)^N \right\} \quad (0 \leq z \leq h, r_\mu = \mu_0 / \mu_b) \quad (21)$$

の  $N=2 \sim 5$  までの解析式で近似表現したときの Reynolds 方程式を定式化した. しかし測定された等価粘度は  $N$  が 5 次より大きいことが推測された. そこでここでは  $N=4, 8, 12$  の場合の粘度関数で表現される飽和高粘度表面層が運動面のみに形成される片面モデルと運動面と固定面に形成されるとした両面モデルの場合について比較的に明らかにする. 前報の解析解と比較できるように, 傾斜平面軸受の長さは  $L = 250 \mu\text{m}$ , 傾斜角は  $\theta = 0.001 \text{ rad}$  とし, また潤滑条件として, 基油のバルク粘度は  $\mu_b = 0.01 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , 滑り速度は  $U = 0.1 \text{ m/s}$  とした. また前報では固定壁面の飽和高粘度  $\mu_0$  のバルク粘度  $\mu_b$  に対する高粘度化率  $r_0 = \mu_0 / \mu_b$  として 1000, 10, 1 の場合を計算したが, 田村ら<sup>7)</sup>の報告から, 実際の値に近いと予想される  $r_0 = 500$  とし, 飽和高粘度層厚さは  $z_c = 50 \text{ nm}$  とした. なお, 2.1 節で述べた片面モデルの式を用いて, 前報<sup>10)</sup>の軸受条件の負荷容量, 摩擦係数等を計算した結果, 同じ結果が得られることを確認している.

### 3.2 等価粘度特性と粘度関数

片面モデルと両面モデルを比較する際, 両面モデルにおける高粘度表面層厚さを  $z_c$  とすると, 片面モデルでは, 式 (21) の粘度関数において  $z_c$  の代わりに  $Z_c = 2z_c$  を用いると等価的にほぼ等価粘度が得られることをすでに示した<sup>9)</sup>. そこで以下においては, 片面モデルの場合は常に  $Z_c = 2z_c$  とした場合の特性を, また両面モデルでは式 (21) の粘度関数を両面モデルに用いた場合を比較的に示す.

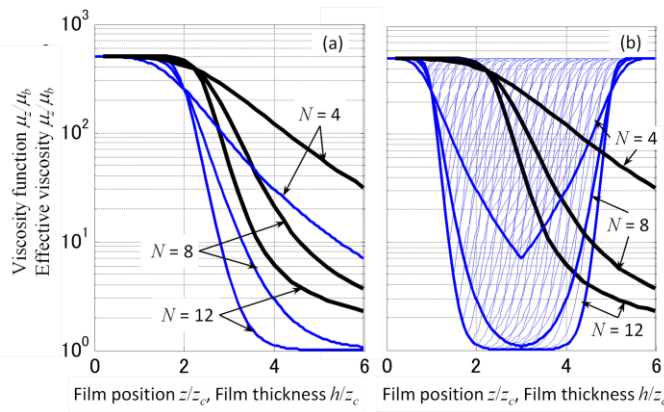


Fig. 2 Viscosity function  $\mu_z/\mu_b$  (thin blue line) and effective viscosity  $\mu_{ef}/\mu_b$  (thick black line) as a function of film position  $z/z_c$  and film thickness  $h/z_c$  when  $r_0 = \mu_0/\mu_b = 500$ , and  $z_c = 50$  nm. (a) One-side model ( $Z_c = 2z_c$ ), (b) Two-side model ( $z_c$ )

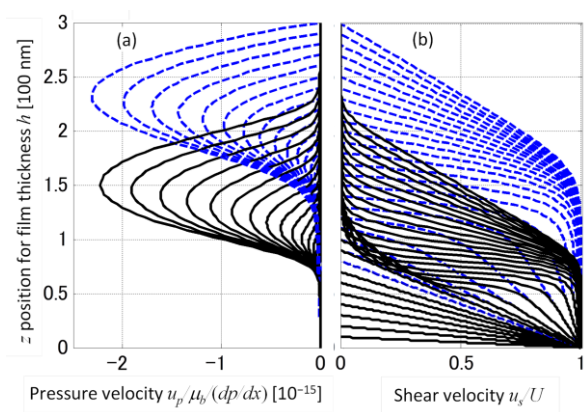


Fig. 3(a) Pressure velocity  $u_{p1}$ ,  $u_{p2}$  and (b) shear velocity  $u_{s1}$ ,  $u_{s2}$  for one-side model with  $Z_c = 2z_c$  (blue dotted line) and two-side model with  $z_c$  (black solid line) vs. film position  $z$  at various film thicknesses  $h$  ( $r_0 = \mu_0/\mu_b = 500$ ,  $z_c = 50$  nm, and  $N = 12$ )

図 2(a)に式(21)で表わされる粘度関数の次数が  $N = 4, 8, 12$  のときの片面モデルの  $\mu_z/\mu_b$  の値を  $z/z_c$  の関数として青細線で示す。またこのとき式(8)で与えられる平行すきまの平均粘度として観測される等価粘度  $\mu_{ef}/\mu_b$  を  $h/z_c$  の関数として黒太線で示す。片面モデルの場合、飽和粘度値の 1/2 の粘度となる高粘度表面層厚さが  $Z_c = 2z_c$  なので、 $z/z_c = 2$  のとき  $\mu_z/\mu_b = 250$  となっている。  $N = 12$  のときの等価粘度  $\mu_{ef}/\mu_b$  は  $z = 4z_c = 200$  nm のときバルク粘度の 6 倍まで低下しており、柴崎ら<sup>6)</sup>の金属性分散剤を添加した場合の等価粘度特性にかなり近くなっている。図 2(b)に両面モデルにおける粘度関数  $\mu_z/\mu_b$  の値を  $z/z_c$  の関数として青細線で示し、それによる等価粘度  $\mu_{ef}/\mu_b$  を  $h/z_c$  の関数として黒太線で示す。青細線の粘度関数は  $N = 4, 8, 12$  における値が重なり分かりにくい、軸受すきま  $h$  で変化し、すきま  $h$  の中央位置に関して常に対称になっている。3 本の太い青線は、  $N = 4, 8, 12$  の場合における最大すきまの  $h/z_c = 6$  における粘度関数を示しており、  $N = 12$  の場合には、すきまの中央部でバルク粘度近くに低下している。これらの対称な粘度関数をもつ両面モデルの等価粘度は図 2(a)の黒線を示す  $Z_c = 2z_c$  とする片面モデルの等価粘度に極めてよく一致している。

### 3.3 流速分布

式(2)および式(9), (10) で示されている圧力流れに関する速度分布  $u_{p1}$  (片面モデル),  $u_{p2}$  (両面モデル) およびせん断流れに関する速度分布  $u_{s1}$  (片面モデル),  $u_{s2}$  (両面モデル) をそれぞれ図 3(a)および(b)に示す。黒実線が両面モデル、青破線が片面モデルの速度分布で、  $N = 12$  の場合の計算例である。軸受すきま  $h$  を 10 nm 間隔で 10 nm から 300 nm まで変化させたときの運動面からの距離  $z$  を縦軸に、速度を横軸に示している。まず図 3(a)より、圧力流れ速度は両面モデルではすきま中央位置に関して対称で、片面モデルでは粘度が小さい領域で速度最大となっている。ただしこの図から分かるように速度分布を積分した片面モデルの流量  $Q_{p1}$  (式(5a))は両面モデルの流量  $Q_{p2}$  (式(15a))とほぼ等しいことが分かる。一方図 3(b)のせん断流れ分布については、両面モデルの  $u_{s2}$  はすきま中央位置に関して点対称で、すきま  $h$  が 100 nm ( $= 2z_c$ ) 以下では片面モデルの  $u_{s1}$  にほぼ等しいが、すきまが大きくなると  $u_{s1}$  が  $u_{s2}$  より大きくなる。このためせん断流量  $Q_{s1}$  は  $h < 2z_c$  の領域では  $Q_{s2}$  に等しいが、  $h > 2z_c$  の領域では  $Q_{s2}$  より大きくなる。

### 3.4 微小傾斜平面軸受の特性

式(4)および(14)の 1 次元修正 Reynolds 方程式を、図 1 の傾斜平面軸受の 1 次元モデルに適用して数値解析により圧力分布を計算した。Reynolds 方程式(4)および(14)の解法は、既報<sup>8-10)</sup>で述べたように、  $x$  方向の離散点  $x_i$  における圧力  $P_i$  に関する代数方程式に変換して解いた。軸受長  $L$  を 200 等分割し、また各  $x_i$  位置での軸受すきま  $h_i$  の  $z$  位置を 100 等分割し、各軸受すきま  $h_i$  における式(3a, b, c)の  $f_1, f_2, f_3$ 、式(13a, b, c, d)の  $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$  および式(16a, b)の  $f_{13}, f_{23}$  を数値計算し、これを用いて Reynolds 方程式の流量係数  $Q_p, Q_s$  を計算した。

圧力分布を軸受位置  $x$  で積分した負荷容量  $W$  [N/m]、式(6, 7), (17, 18)のせん断力を  $x$  で積分した運動面および固定面の摩擦力  $F_0, F_h$  および運動面の摩擦係数  $f_{c0} = F_0/W$  を、軸受の後端すきま  $h_T$  の関数としてそれぞれ図 4(a), (b), (c), (d)に示す。黒実線が両面モデル、青破線が片面モデルである。粘度関数の壁面での増加率は  $r_0 = 500$ 、固体壁面の粘度から 50%低下する高粘度層厚さ  $z_c$  は、両面モデルでは  $z_c = 50$  nm、片面モデルでは  $Z_c = 2z_c = 100$  nm としている。また黒点線は  $r_\mu = 1$  で等粘度潤滑膜の特性である。

負荷容量  $W$  は、  $N = 4$  では  $N = 12$  に比べて  $h_T > 2z_c$  の領域でかなり過大評価されることが分かる。図 2 に示した等価粘度特性  $\mu_{ef}/\mu_b$  の  $N = 12$  のときの特性から、  $z_c = 50$  nm のとき、  $\mu_{ef}/\mu_b$  が飽和するすきまが  $\sim 100$  nm で、飽和粘度の約 1/100 でバルク粘度の 6 倍になるすきまが  $\sim 200$  nm となるので、  $N = 12$  の場合が実験結果<sup>6)</sup>に近いと推察される。  $N = 12$  の場合、  $W$  は  $h_T = \sim 300$  nm ( $= \sim 6z_c$ )で点線のバルク粘度の  $W$  の 5 倍、  $h_T = \sim 200$  nm ( $= \sim 4z_c$ )で 11 倍、  $h_T = \sim 100$  nm ( $= \sim 2z_c$ )で 70 倍、  $h_T = 50$  nm ( $= z_c$ )で 220 倍程度となっている。青破線の片面モデルによる  $W$  は、  $h_T = Z_c = 2z_c$  の前後で両面モデルの  $W$  より大きくなっているが、他の領域では黒線の両面モデルの  $W$  より微小に小さくなっている。これは図 2 において、軸受すきまが  $2z_c$  の前後では、  $Z_c = 2z_c$  の片面モデルの粘度関数が両面モデルよりかなり大きくな

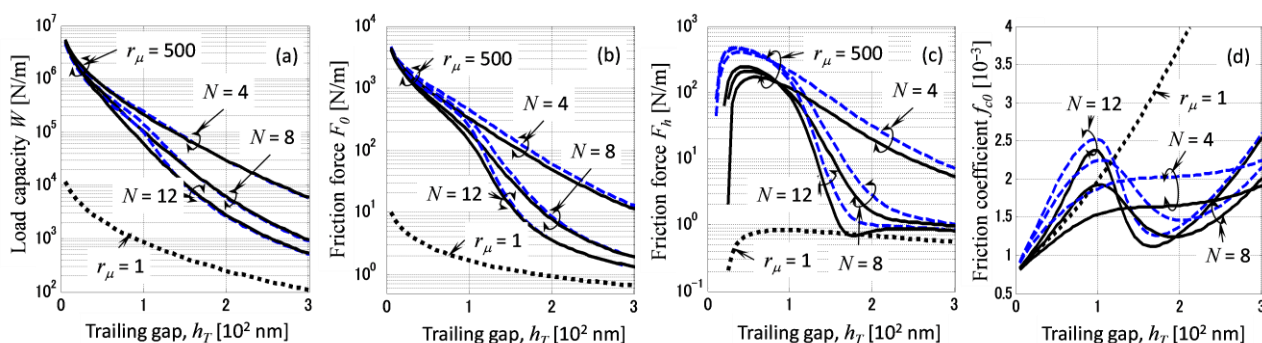


Fig. 4 (a) Load capacity  $W$  vs. trailing gap  $h_T$ , (b) friction force on moving surface  $F_0$  vs.  $h_T$ , (c) friction force on stationary surface  $F_h$  vs.  $h_T$ , and (d) Friction coefficient on moving surface for two-side model (black solid line) and one-side model (blue dashed line) when  $r_\mu = 500$ ,  $z_c = 50$  nm, and  $N = 4, 8$ , and  $12$  ( $L = 250$   $\mu\text{m}$ ,  $\theta = 0.001$ ,  $U = 0.1$  m/s,  $\mu_b = 0.01$  Pa $\cdot$ s).

るからである。

図 4(b)の運動面の摩擦力  $F_0$  は基本的に  $W$  と似た特性を示しているが、理論式から  $W$  は  $(L/h_T)^2$  に比例するので、 $h_T$  の減少に対する  $F_0$  の増加程度は小さい。また青破線の片面モデルの  $F_0$  の方が両面モデルより少し大きい。一方、 $F_h$  は  $N$  が大きくなると  $h_T = \sim 150$  nm ( $\sim 3z_c$ ) 程度まで  $h_T$  の減少に対して  $F_h$  はあまり増加しない。これは  $r_\mu = 1$  の等粘度軸受の特性に起因しているといえる。また  $h_T$  がゼロに近づくとき  $F_h$  は急減しているが、これも  $r_\mu = 1$  のときの等粘度軸受の特性の  $F_h$  が微小な負値をとるようになるからである。

図 4(d)は運動面の摩擦係数  $f_{c0}$  を比例軸で示しているが、固定面の摩擦係数  $f_{ch}$  と常に  $f_{c0} = f_{ch} + 0.001$  ( $=\theta$ ) の関係がある。一般に高粘度化層により摩擦係数はバルクの場合に比べ  $h_T > 3z_c$  の領域では数分の 1 に低下し、 $N$  が大きくなると、 $h_T$  の減少に伴い、極小値と極大値をもつようになる。 $N = 12$  になると、 $h_T = \sim 3z_c$  より少し大きな位置で極小値をとり、 $h_T = \sim 2z_c$  のところで極大値をとり、極大値は  $r_\mu = 1$  の場合の摩擦係数より大きくなる。この現象は則久ら<sup>3)</sup>の酸性リン酸エステル添加剤によるなじみ後の摩擦係数特性にみられる。また田村ら<sup>4)</sup>の MoDTC やエステル誘導体などの FM 剤による混合潤滑領域にも似た傾向がみられる。

#### 4. おわりに

任意の粘度関数をもつ高粘度表面層を片面と両面にもつ潤滑膜の修正 Reynolds 方程式を定式化し、両面モデルと等価な片面モデルの条件を示すとともに、両面・片面モデルによる等価粘度、負荷容量、摩擦力、摩擦係数の特性を明らかにした。本解析では粘度関数で示す高粘度表面層が常に形成されていると仮定しているが、続報では狭小化により即時的に生じる高粘度層の粘度関数の表現法とそれによる軸受特性を明らかにする。

#### 文 献

- Guangteng, Spikes: Boundary Film Formation by Lubricant Base Fluids, Tribol. Trans. 39, 2 (1996) 448.
- 則久・糸魚川・中村: 底面圧境界潤滑のける摩擦係数の速度依存性に関する研究(第1報), トライボロジスト, 53, 10 (2008) 682.
- Spikes: Friction modifier additives, Tribol Lett 60, 5 (2015).
- Tamura, Kasai, Nakamura, and Enomoto: Impact of Boundary Lubrication Performance of Engine Oils on Friction at Piston Ring-Cylinder Liner Interface, SAE Int. J. Fuels Lubricant, 7, 3 (2014)
- Itoh, Ohta, Fukuzawa, Zhang: Enhanced viscoelasticity of Polyalphaolefins confined and sheared in submicron-to nanometer-sized gap range and its dependence on shear rate and temperature, Tribol. Int. 120 (2018) 210.
- 柴崎, 水上, 吉田, 柳町, 田辺, 栗原: 共振ずり測定法によるエンジンオイルの潤滑特性評価: 添加剤の効果の検討, トライボロジスト, 63, 4 (2018) 284.
- 田村, 砂原, 石川, 水上, 栗原: 清浄剤のトライボ科学反応促進機構: ナノ空間拘束下での立体障害によるせん断抵抗の増大, トライボロジー会議2017秋 高松 予稿集 D11, 2017.
- Ono: Modified Reynolds Equation for High Viscosity Surface Layer and Thin Film Lubrication Analysis of Tapered/ Tapered Land bearings as Models of Surface Texture, Tribology Online, 14, 5 (2019) 267.
- Ono: Modified Reynolds equations for thin film lubrication analysis with high viscosity surface layers on both solid surfaces and analysis of micro-tapered bearing, Tribology International, Vol. 151, Nov. 2020, Article 106515.
- 小野: 固体面で飽和する高粘度表面層をもつ液膜の潤滑方程式と傾斜平面軸受の特性解析, トライボロジスト, 66, 6 (2021) 470.
- Tichy: A Surface Layer Model for Thin Film Lubrication, Tribol. Trans, 38, 3 (1995) 577.
- Zhang, Luo, Wen: A New Postulation of Viscosity and Its Application in Computation of Film Thickness in TFL, ASME J. Tribol., 124 (2002) 811.