

# 振子式摩擦測定において Stanton の式で算出される摩擦係数に含まれる誤差

Accuracy of Stanton's equation used for the data processing of a pendulum friction test

国立衛研, 北里大学 馬淵 清資

Kiyoshi Mabuchi\*\*\*

\*National Institute of Health Sciences, \*\*Kitasato University

## 1. はじめに

振子式摩擦測定は, 人工関節やコンタクトレンズなどの回転摩擦面において有用であり, パイオトライボロジ分野では, 特に重要である. 振子の振幅の減衰角から, 支点に置いた滑り面の摩擦係数を求める際に, この方法の提唱者の名前に因んで名付けられた, Stanton の式が一般に用いられてきた<sup>1,2)</sup>.

Stanton の示した解析には, 近似計算が含まれており, 誤差の発生は避けられない. しかし, 厳密解を解析的に得るのが困難という理由で, これまで誤差の詳細な検討は, されていなかった.

摩擦測定の結果から潤滑状態を推定する際は, 速度の依存性を議論するため, 振幅の大きさに依存した誤差の発生の有無を検討しておく必要がある. そこで, 厳密計算を行って, Stanton の式の示す摩擦係数に含まれる誤差を評価してみた.

## 2. Stanton の式

Stanton の式は, 振子の自由揺動で測定された, 減衰角  $\Delta \theta$  [rad], 滑り面 (支点) 半径  $r$  [m], 重心支点間距離  $L$  [m] から, 摩擦係数  $\mu$  を算出する式である.

$$\mu_{st} = \frac{L\Delta\theta}{4r} \quad (\text{Stanton の式})$$

Stanton(1923)は, 単振り子の運動方程式を解いてこの式を求めている.

慣性モーメント  $I$  [kgm], 振子の質量  $m$  [kg], 重力加速度 [m/s] とすると, 場合, 振子支点周りのモーメントの釣り合いから, 支点部分に乾性摩擦のある場合の減衰振動の運動方程式は,

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL \sin \theta \pm \mu mgr = 0 \quad (\text{原式})$$

と表される. この方程式は非線形なので, 代数的に解くには, 単振り子の解析に常用される  $\sin \theta \div \theta$  という近似が必要になる.

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL \theta \pm \mu mgr = 0 \quad (\text{近似式})$$

この式を解くと, 角度  $\theta$  が, Fig.1 に示すような減衰振動波形となる. この時の減衰角  $\Delta \theta$  と摩擦係数の関係から, (Stanton の式)が導かれる.

## 3. 厳密解

近似による誤差を評価するには, (原式) を解いて厳密解を求めるのは, 困難である. 一方, 位置エネルギーの減少と摩擦エネルギーによる消費のバランスから, 減衰角と摩擦係数の関係を求めることが出来る<sup>3)</sup>.

1 回の減衰振動の間のエネルギー収支を考えると,

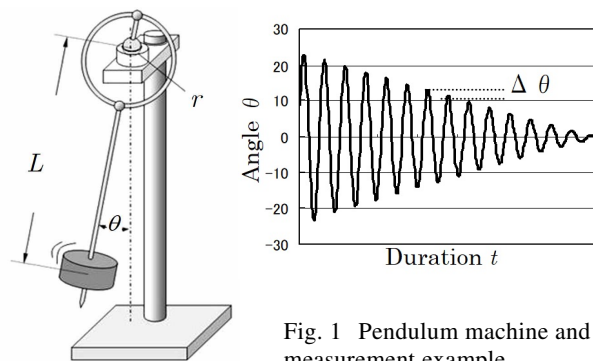


Fig. 1 Pendulum machine and measurement example

摩擦によって散逸するエネルギー:  $\mu mg \times 2r(\theta_n + \theta_{n+1})$

消費される位置エネルギー:  $Lmg(\cos \theta_{n+1} - \cos \theta_n)$

両者が等しいので,  $\mu \times 2r(\theta_n + \theta_{n+1}) = L(\cos \theta_{n+1} - \cos \theta_n)$

よって, 厳密計算による摩擦係数は,

$$\mu = \frac{L(\cos \theta_{n+1} - \cos \theta_n)}{2r(\theta_n + \theta_{n+1})} \quad (\text{厳密解})$$

となる.

この式で,  $\cos \theta = 1 - \theta^2 / 2$  と近似をして,  $\theta_n - \theta_{n+1}$  を  $\Delta \theta$  に置き換えると, (Stanton の式) に一致する.

## 4. 誤差の評価

振子摩擦測定の結果にどれほどの誤差が含まれるのか, (Stanton の式) で求められる摩擦係数を (厳密解) と比較して求める.

$$\mu_{st} - \mu = \frac{L}{r} \left\{ \frac{(\theta_n - \theta_{n+1})}{4} - \frac{(\cos \theta_{n+1} - \cos \theta_n)}{2(\theta_n + \theta_{n+1})} \right\} \quad (\text{誤差})$$

となる. この誤差の割合は,

$$\frac{\mu_{st} - \mu}{\mu} = \frac{\theta_n^2 - \theta_{n+1}^2}{2(\cos \theta_n - \cos \theta_{n+1})} - 1 \quad (\text{誤差の割合})$$

となる.

Fig. 3 に示すように, 振れ角が大きいほど誤差は増大し, また, 減衰角が小さいほど, 誤差が大きい. 振れ幅 0.5 rad (約 30 度), 減衰角 0.02 rad の場合, 約 4% の誤差が発生する.

## 5. 厳密解と Stanton の式の比較

振子試験の結果, Fig.2 に示すような直線的な振動減衰が得られた場合,  $\Delta \theta$  が一定なので, (Stanton の式) で求められる摩擦係数は, 一定値となる. それに対して,

(厳密解)で求めた摩擦係数は、 $\Delta \theta$  が一定であっても、振幅に依存した変化をして、振幅が大きい時に (Stanton の式) より小さく、振幅の減少に伴って両者が接近し、振幅が 10 度未満では、ほぼ、一致する。

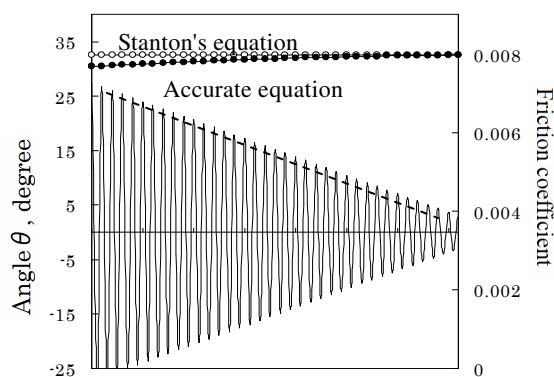


Fig. 2 Friction coefficient calculated on the linear damping of pendulum amplitude.  
( $L = 27$  mm,  $r = 10$  mm)

Stanton(1923)は、直線的な減衰が、滑り速度に依存しない摩擦は、流体潤滑の影響を排除されていることを示すと考えた<sup>1)</sup>。それは、材料の摩擦特性を調べるために、適していると考えた。曾田(1943)は、潤滑油の境界潤滑性能を測定する専用の摩擦試験振り子試験器を開発する際、滑り面の接触面積を小さくするための工夫を施した<sup>2)</sup>。一方、ここで求めた厳密解によると、試験結果として得られる減衰曲線が、直線であっても、摩擦係数一定を意味しないことがわかった(Fig.2)。逆に、摩擦係数が一定であれば、振幅が大きさに依存して減衰量が増すので、下に凸の曲線になり、流体潤滑の影響が存在するような傾向を示す可能性がある。摩擦係数一定の振子の減衰曲線を厳密解の逆計算により求めてみた結果、Fig. 3 に示すように、誤差の影響は微小で、減衰曲線の形状は、ほぼ直線となることがわかった。

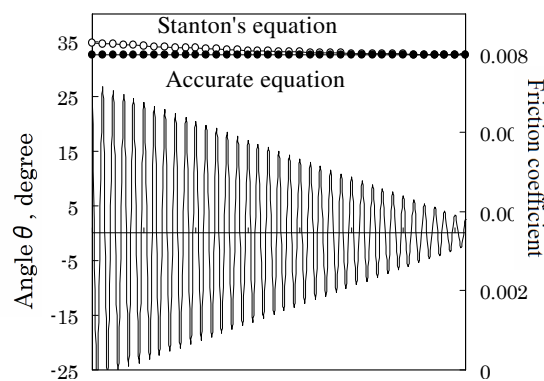


Fig. 3 Damping curve at constant friction.  
( $L = 27$  mm,  $r = 10$  mm)

## 6. 測定例に関する誤差評価

従来、実施した、コンタクトレンズ(Fig. 4)と、人工股関節(Fig.5)を対象とした振子摩擦測定の実測例について、Stanton の式の誤差が、どれほどの影響を及ぼすかを検証してみた。それぞれの測定には、専用の振子摩擦測定装置を用い<sup>3,4)</sup>、角度の検出には、振子に搭載した小型傾斜角センサー (Bluetooth 無線, WT61CL, WitMotion)を用いた。いずれの実験でも、Stanton の式で計算された摩擦係数の誤差は、角度の測定外乱のばらつきより、はるかに

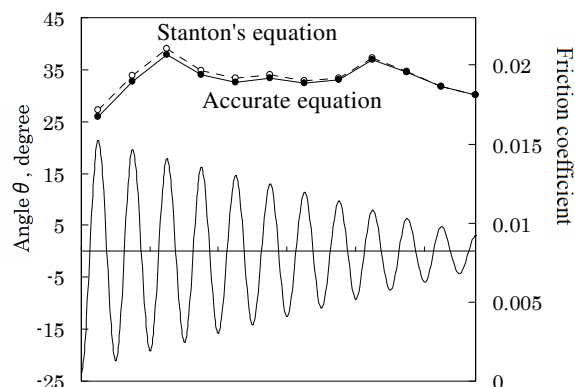


Fig. 4 Friction coefficient calculated from the data actually measured on a contact lens. ( $L = 27$  mm,  $r = 10$  mm, Weight = 19 g, Lubricant: Saline solution)

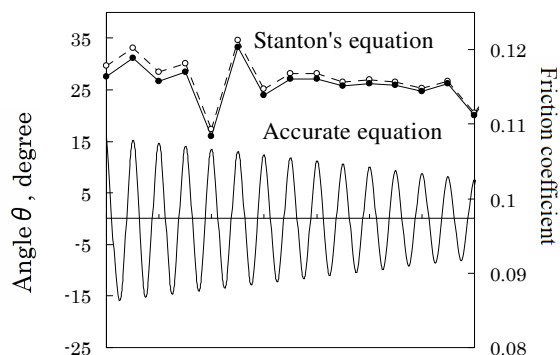


Fig. 5 Friction coefficient calculated from the data actually measured on a hip prosthesis.  
( $L = 806.1$  mm,  $r = 18$  mm, Weight = 19 g, Lubricant: Hyaluronic acid 0.2% solution)

小さいことがわかった。摩擦係数の値のばらつきが大きい原因は、振幅の減算によって求めた  $\Delta \theta$  を、計算に用いるため、有効数字の桁落ちが発生するためである。

## 7. おわりに

振子式摩擦測定の結果得られる減衰角から摩擦係数を求める厳密な解析を行った。その結果、従来、一般に用いられてきた Stanton の式の近似誤差は、最大 4%程度であった。これは、実用上、測定外乱よりはるかに小さく、無視できることがわかった。

## 文献

- 1) Stanton TE: Boundary lubrication in engineering practice, The Engineer, 135, (1923) 3522.
- 2) 曾田, 宮田: 油性試験機の研究, 航技研報告, 276,(1943) 204.
- 3) Mabuchi, K., et al.: The effect of additive hyaluronic acid on animal joints with experimentally reduced lubricating ability. J Biomed. Mater. Res., 28, 8, (1994) 865.
- 4) Mabuchi, K., et al.: Development of a pendulum machine for measuring contact lens friction. Biosurface and Biotrib., 7, 3, (2021) 154.