

# 静摩擦のパラドックスを解決する二種類の力学的シナリオ

Two mechanical scenarios solving the static friction paradox

横国大(学)※渡辺 稔紀, (正)中野 健

Toshiki Watanabe<sup>1</sup>, Ken Nakano<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Yokohama National University

## 1. 緒言

古典的な経験則である摩擦の法則により、摩擦現象は「静摩擦」と「動摩擦」の二種類で記述できることが広く知られている。実際に静摩擦と動摩擦を用いると、固着と滑りの二種類の状態間の遷移現象をある程度表現できる。しかし、近年の精密な実験により、固着から滑りへの一見不連続な遷移は、実際には低速滑りから高速滑りへの連続的な遷移であることが示されている[1]。これは、物体が完全に固着することを前提とする静摩擦が働くべき状況下で物体が滑っているという、従来の摩擦の法則では説明ができない現象であり、「静摩擦のパラドックス」と呼ばれている。このパラドックスを解決するために、速度状態依存則[2]と呼ばれる摩擦則がよく用いられる。速度状態依存則は、仮想的に導入した状態変数を1階の微分方程式により更新し、摩擦係数の決定式と連立させて、複雑な摩擦現象を表現する。この摩擦則を用いると、低速滑りを伴う固着滑り遷移の実験結果が再現できる。しかし、このような数学的な手法は、状況を再現するという役割は果たしているものの、その物理的解釈は容易ではない。

近年の研究で、純粋な力学の枠組みで静摩擦のパラドックスを解決する二つの理論が提案されている。一つは、接触面内のミスマライメントを考慮して、摩擦力ベクトルの回転により固着滑り遷移を説明する理論[3]である。もう一つは、接触する二物体の貫入量を考慮して、圧子の浮上現象により固着滑り遷移を説明する理論[4]である。前者では静摩擦を用いずに、後者では明示的な摩擦則を用いずに、低速滑りを伴う固着滑り遷移が表現される。そこで本研究では、二種類の力学的シナリオが共存しうるモデルを構築し、各シナリオの関係性を明らかにすることを目的とする。

## 2. 方法

本研究で用いた力学モデルを図1に示す。 $x$ 方向のばね(剛性: $k_x$ )に支持された球状の剛体圧子(曲率半径: $R$ , 質量: $m$ )が、一定の荷重(荷重: $W=mg$ )で粘弾性ファンデーション(弾性係数: $K$ , 減衰係数: $C$ )と接触する。粘弾性ファンデーションは、 $x$ 方向からミスマライメント角 $\varphi$ だけ $z$ 軸周りに回転した方向に一定速度 $V$ で駆動する。粘弾性ファンデーションは互いに独立な Kelvin-Voigt 要素でモデル化した。剛体圧子は、 $y$ 方向には完全に拘束され、 $x$ 方向と $z$ 方向の二自由度を持つ。剛体圧子の運動方程式は以下のように書ける。

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xy} \cos \theta - k_x x \\ F_z - W \end{bmatrix} \quad (1)$$

ただし、 $F_{xy}$ と $F_z$ はファンデーションから剛体圧子に伝わる合力の水平面成分(摩擦力に相当)と鉛直成分(垂直抗力に相当)であり、 $\theta$ は摩擦力 $F_{xy}$ の $x$ 軸からの角度である。十分に細かく時空間を分割し、運動方程式を二つの条件で数値計算した。計算条件は、 $R=1$  mm,  $K=10^{10}$  N/m<sup>3</sup>,  $C=10^{10}$  Ns/m<sup>3</sup>,  $m=10$  kg,  $k_x=1$  kN/mを一定とし、一つ目の条件(図2(a))では $\varphi=0^\circ$ ,  $V=5$  mm/s, 二つ目の条件(図2(b))では $\varphi=10^\circ$ ,  $V=50$  mm/sとした。

## 3. 結果および考察

まず、時空間を理論的に無次元化した。無次元時間 $\tau(=(k_x/m)^{1/2}t)$ は固有角振動数により無次元化し、無次元位置 $\hat{x}(=xk_x(8R^3K/W^5)^{1/4}/\cos\varphi)$ と $\hat{z}(=z(\pi RK/W)^{1/2})$ は、無次元速度 $V(C/K)(K/RW)^{1/4}$ が同じ値のときに平衡点が一意に定まるように定義した。代表的な二種類の数値計算の結果を図2に示す。上から、剛体圧子の $x$ 座標、 $z$ 座標、摩擦力の向きの時系列信号である。 $x$ 座標の時系列信号から、二つの結果は、変位が概ね $x=Vt$ の関係で線形的に増加する固着区間と、短時間で急落する滑り区間があり、どちらも典型的な固着滑り遷移の時系列信号といえる。

次に、固着滑り遷移のメカニズムを考察する。先行研究では、滑り速度が増加すると、摩擦力ベクトルが回転すること[3]と、剛体圧子が浮上すること[4]が示されている。先行研究と同様の解析を本モデルに適用すると、固着から滑りに遷移すると予想される臨界の $z$ 座標と摩擦力の向きを導出できる。臨界の $z$ 座標は $\hat{z}=-0.68$ であり、このときの滑り速度は $v_{crz}=1.6(K/C)(RW/K)^{1/4}$ となった。臨界の摩擦力の向きは $\theta=30^\circ$ であり、このときの滑り速度は $v_{crt}=2V\sin\varphi$ となった。図2の青色の破線は、それぞれの臨界値を表している。図2(a)を見ると、 $x$ 座標が急落するタイミングで $z$ 座標が臨界値を跨いでいることがわかる。一方、摩擦力の向きは $\theta$

$= 0^\circ$ または  $180^\circ$ のどちらかを示しており、連続的な変化はない。図 2 (b)では、摩擦力の向き  $\theta$  が連続的に変化し、 $x$  座標が急落するタイミングで臨界値を跨いでいる。一方、 $z$  座標が臨界値を跨ぐのは初期の一度である。すなわち、図 2 (a)では剛体圧子の浮上、図 2 (b)では摩擦力の回転が顕著に現れている。図 2 (a)の計算条件は  $v_{cr\theta} < v_{crz}$  の関係にあり、図 2 (b)はその反対である。よって、現れる物理現象は臨界滑り速度の競合により決まり、臨界滑り速度が高い方の物理現象が顕著に現れることがわかった。

#### 4. 結言

本研究では、静摩擦のパラドックスを解決する二種類の力学的シナリオ(摩擦力の回転と圧子の浮上)が共存しうるモデルを用いて、各理論の関係性を考察した。結論として、固着滑り遷移時に現れる物理現象は、臨界滑り速度の競合により決まり、臨界滑り速度が高い方の物理現象が顕著に現れることがわかった。

#### 謝辞

本研究は CREST(JPMJCR2193), ERATO(JPMJER2401), 科研費(25KJ1322)の助成を受けて実施した。

#### 文献

- [1] V. L. Popov, B. Grzemba, J. Starcevic, M. Popov: "Rate and state dependent friction laws and the prediction of earthquakes: What can we learn from laboratory models?", Tectonophysics, 291, 532-535 (2012).
- [2] J. H. Dieterich: "Modeling of rock friction: 1: Experimental results and constitutive equations", Journal of Geophysical Research, 84, 2161 (1979).
- [3] K. Nakano, V. L. Popov: "Dynamic stiction without static friction: The role of friction vector rotation", Physical Review E, 102, 063001 (2020).
- [4] T. Watanabe, K. Nakano: "Viscoelastic toy model explaining the static friction paradox in stick-slip instability without friction laws", Physical Review E, 111, 065504 (2025).

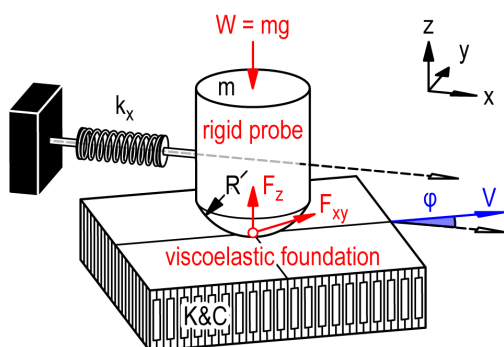


図 1 力学モデル

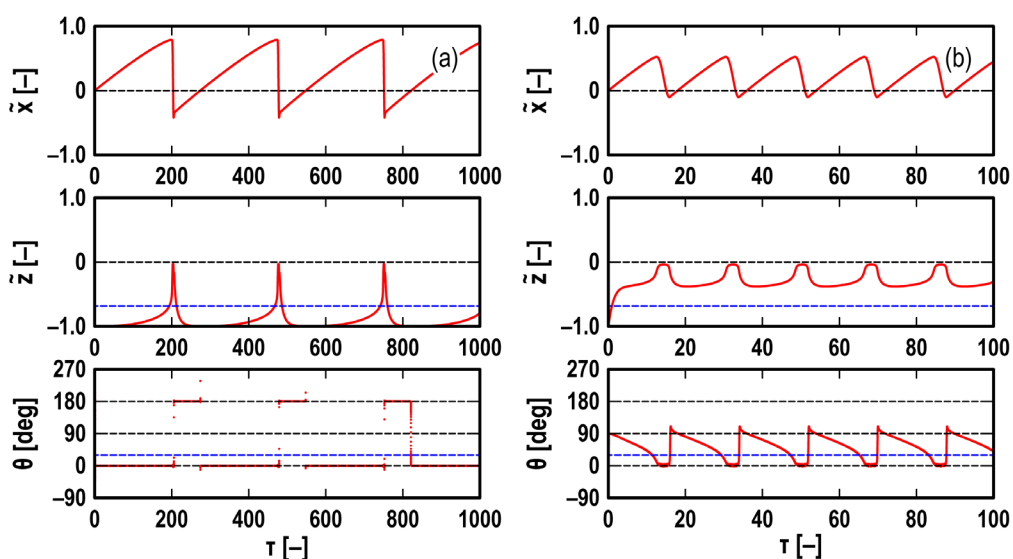


図 2 プローブの位置と摩擦力の向きの時系列信号 ((a):  $\phi = 0^\circ$ ,  $V = 5$  mm/s, (b):  $\phi = 10^\circ$ ,  $V = 50$  mm/s)