

確率密度分布を用いたロバストなスキューネスとクルトシスの計算法

A method for calculating robust skewness and kurtosis using probability density distributions

岩手大・院（正）*泉山 尚慶 岩手大・理工（正）内館 道正

Naochika Izumiyama*, Michimasa Uchide*

*Iwate University

1. 緒言

機械産業で広く使われているベアリング等の部品は摩擦損失低減が常に求められており、これを達成するためには部品同士の接触面のトライボロジー特性を正確に評価する必要がある。物体の表面性状を表すパラメータとして、高さの確率密度分布の形状を表すスキューネスとクルトシスがあり、トライボロジー特性との関連が検討されるようになってきている¹⁾。それぞれの計算式は式(1)、(2)の通りである²⁾。

$$S_{sk} = \frac{1}{S_q^3} \left[\frac{1}{A_e} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} z^3(x, y) dx dy \right] \quad (1)$$

$$S_{ku} = \frac{1}{S_q^4} \left[\frac{1}{A_e} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} z^4(x, y) dx dy \right] \quad (2)$$

A_e : 評価面積, S_q : 二乗平均平方根高さ, L_x, L_y : x, y 方向の評価領域の大きさ, $z(x, y)$: 高さ

しかし、表面高さデータを式(1)、(2)に代入して直接計算する従来のスキューネスとクルトシスの計算法（以下、従来法）では、外れ値に大きく影響を受けやすいという問題がある。そのため外れ値に影響を受けない算出法が必要とされている。

佐々木³⁾の研究では確率密度関数を用いた計算法が検討され、従来法よりもばらつきが少ないパラメータを得られることが示されている。しかし、Peason IV という 1 種類の確率密度関数でしか検討されておらず、実際の加工表面においての十分な検証はされていない。また、確率密度関数の分布パラメータを求める数値探索法として直接探索法のみしか検討されていない³⁾。

本研究では、新たに Johnson Su と呼ばれる確率密度関数を用いてスキューネスとクルトシスを算出し、ばらつきの大きさについて従来法と比較した。また、確率密度関数をフィッティングする際の分布パラメータの数値探索法についても、準ニュートン法（L-BFGS 法）⁵⁾を新たに用いて計算結果への影響を検討した。

2. 計算法

本研究で検討する手法では加工表面の高さ分布に確率密度関数をフィッティングし、フィッティング時の分布パラメータからスキューネスとクルトシスを計算する。Johnson Su の式を式(3)に示す⁴⁾。

$$f(z) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(z-a)^2+b^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\gamma + \delta \log \left[\frac{z-a}{b} + \sqrt{\left(\frac{z-a}{b} \right)^2 + 1} \right] \right)^2 \right\} \quad (3)$$

$$-\infty < z < \infty, \quad -\infty < \gamma < \infty, \quad \delta > 0, \quad -\infty < a < \infty, \quad b > 0$$

ここで、 γ, δ, a, b は確率密度関数を決定する分布パラメータ（以下、分布パラメータ）であり、 γ は分布の左右対称性、 δ は分布の裾野の広がり、 a は分布の左右位置、 b は分布の全体的な広がり特徴づけるパラメータである。以下に詳細な計算法を説明する。

①表面高さデータをヒストグラムに変換する。区間の数は 50 とする。

②分布パラメータを推定する。具体的には、最尤法を用いて高さの確率密度分布に Johnson Su をフィッティングする。

③推定した分布パラメータから次式を用いてスキューネスとクルトシスを計算する⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 &= \frac{b^2}{2}(\omega - 1)(\omega \cosh 2\Omega + 1), \mu_3 = -\frac{b^3}{4}\omega^{\frac{1}{2}}(\omega - 1)^2\{\omega(\omega + 2) \sinh 3\Omega + 3 \sinh \Omega\} \\ \mu_4 &= \frac{b^4}{8}(\omega - 1)^2\omega^2(\omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 3) \cosh 4\Omega + 4\omega^2(\omega + 2) \cosh 2\Omega + 3(2\Omega + 1) \\ S_{sk} &= \sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}, S_{ku} = \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、 $\omega = \exp(\delta^{-2})$, $\Omega = \frac{\gamma}{\delta}$, μ_n : 期待値まわりの n 次モーメントである。

また、分布パラメータの推定には直接探索法³⁾に加え、新たに準ニュートン法を用いた⁵⁾。任意の方程式 $f(x)$ において、 $f(x) = 0$ の解の近似値を初期値 x_0 とする。探索方向 $d_k = -H_k^{-1} \nabla f(x_k)$ を求めて、減少量が十分であるようにステッ

幅 α_k を決める．ここで， $\nabla f(x_k)$ は点 x_k における $f(x)$ の勾配を示す．また H_k は Hesse 行列の近似行列であり，計算式を式(5)に示す．

$$H_{k+1} = (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T \quad (5)$$

そして， $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ の計算を繰り返して，真の解の近似値を求める．ここで， y_k と s_k はそれぞれ勾配の差分と点の差分であり， $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ ， $s_k = x_{k+1} - x_k$ でもとめる．また， $\rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k}$ である．

3. 検証

3.1 実加工表面データでの検証

本研究では，RUBERT 社の比較用標準片を触針式粗さ測定機で測定し，検証に用いた．測定した標準片は 12 種類の加工表面（各 2～5 個）であり，合計 38 個の表面についてサンプリング間隔を $0.1 \mu\text{m}$ に設定して 4 mm 測定した．ただし，1 つの加工表面につき異なる箇所を 4 回ずつ測定した．2 章の②における分布パラメータの推定に直接探索法を用いてフィッティングを行い，スキューネスとクルトシスの計算を行った．

例としてポリッシング加工表面の高さ分布に Johnson Su をフィッティングした結果を Fig. 1 に示す．Johnson Su が高さ分布に十分に一致していることが確認できる．他の全加工表面データにおいても同様に一致していた．Figure 2 にポリッシング加工表面における各計算法によるスキューネスの計算結果の箱ひげ図を示す．Johnson Su のフィッティングによる計算結果は従来法の結果よりばらつきが小さいことが分かる．従来法の方がばらつきの小さいデータも存在したが，多くのデータでは同様の傾向が見られた．また，クルトシスにおいてもスキューネスと同様にばらつきの小さい計算結果が得られたデータが多かった．

3.2 数値探索法による影響

2 章の②における分布パラメータの推定法として準ニュートン法を用いて，結果を直接探索法と比較した．比較は対数尤度，反復回数，計算時間の三項目について行った．結果の比較を Table 1 に示す．対数尤度の値から，準ニュートン法による数値探索は直接探索法に近い精度でフィッティングが可能であると言える．反復回数や計算時間に関しては，直接探索法と比較して大幅に短縮できていた．これは，直接探索法が微小な変化量を 1 つのパラメータに与えるという工程を繰り返して探索を進めるのに対して，準ニュートン法は行列計算で 4 つのパラメータを一度に更新することができるからだと考えられる．

4. 結言

本研究では，新たに Johnson Su と呼ばれる確率密度関数を用いてスキューネスとクルトシスを算出し，ばらつきの大きさについて従来法と比較した．確率密度関数に Johnson Su を使用することで従来法よりもばらつきの小さい結果を得られることが分かった．また，フィッティングに用いる数値探索法として準ニュートン法を使用した場合，フィッティング精度は直接探索法と比較して同程度であり，ロバスト性を保ちながら計算時間を大幅に短縮できることが分かった．

文献

- 1) 獅子原，トライボロジー会議 2025 春 東京 予稿集(2025) B6.
- 2) 内館道正，トライボロジスト，60，1(2015)15-22.
- 3) 佐々木裕・内館道正，トライボロジー会議 2018 秋 伊勢予稿集(2018)D21.
- 4) 蓑谷千風彦：統計分布ハンドブック増強版，朝倉書店(2020)76.
- 5) 田村明久，村松正和：最適化法，共立出版(2002)105-108,116,119-121.

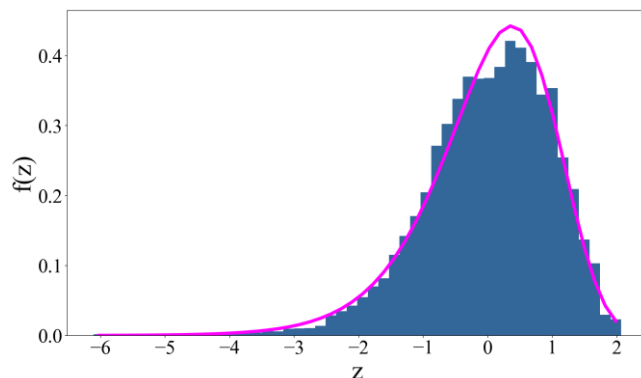


Fig. 1 Example of fitting Johnson Su to Polished surface data

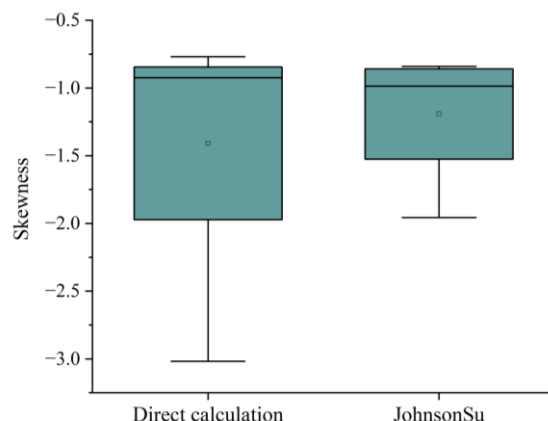


Fig. 2 Box plot of skewness calculation results for polished surface data using each calculation method

Table 1 Average value of log-likelihood, number of iterations, and computation time for each search method

	Direct search method	L-BFGS method
Log-likelihood	-53458	-53632
Iteration count	1200	4.7
Calculation time (s)	1.6	0.018